物理問題　I

(1)

$\boxed{ア}$ $\sqrt{2gh}$　$\boxed{イ}$ $3mg$　ウ $\left(1+\dfrac{2}{e}\right)\dfrac{L}{\sqrt{2gh}}$

解説

$\boxed{ア}$

求める速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mv^2 = mgh$　$\therefore v = \sqrt{2gh}$

$\boxed{イ}$

地表で静止している観測者の立場

小球の中心方向の運動方程式 $m \cdot \dfrac{v^2}{h} = T - mg$ および $v = \sqrt{2gh}$ より $T = 3mg$

小球と共に運動中の観測者の立場

小球に働く中心方向の力のつり合い $T = m \cdot \dfrac{v^2}{h} + mg$ および $v = \sqrt{2gh}$ より $T = 3mg$

$\boxed{ウ}$

$$\frac{L}{v} + \frac{2L}{ev} = \left(1+\frac{2}{e}\right)\frac{L}{v} = \left(1+\frac{2}{e}\right)\frac{L}{\sqrt{2gh}}$$

(2)

$\boxed{エ}$ $\sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$　$\boxed{オ}$ $\dfrac{m(2m+3M)}{M}g$　$\boxed{カ}$ $\sqrt{\dfrac{2(m+M)gh}{M}}$　$\boxed{キ}$ $L\sqrt{\dfrac{M}{2(m+M)gh}}$

$\boxed{ク}$ $\dfrac{2L}{e}\sqrt{\dfrac{M}{2(m+M)gh}}$　$\boxed{ケ}$ $\sqrt{\dfrac{M}{m+M}}$

解説

$\boxed{エ}$

小球が最下点 B に到達する直前における小球と台車の速度をそれぞれ v, V とすると，

小球が受ける水平方向の外力は張力の水平成分でその向きは x 軸正方向である。

台車が受ける水平方向の外力は張力の水平成分でその向きは x 軸負方向である。

よって，両物体の力積の和が 0 となり，運動量が保存される。

これと初めの運動量が 0 であることから，$0 = mv + MV$　$\therefore M^2V^2 = m^2v^2$　・・・①

力学的エネルギー保存則より，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \quad \therefore 2mMgh = mMv^2 + M^2V^2 \quad ・・・②$$

①，②より，$2mMgh = mMv^2 + m^2v^2$　$\therefore (m+M)v^2 = 2Mgh$　$\therefore v = \sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$

オ

台車上の静止観測者が見ると，小球は軌道半径 h の円運動をし，
最下点におけるその速度は $v-V$ である。
したがって，最下点 B における小球の中心方向の運動方程式は

$$m\cdot\frac{(v-V)^2}{h}=T-mg \quad \cdots ③$$

また， $v=\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$ ， $0=mv+MV$ より， $V=-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$

$$\therefore (v-V)^2=\frac{2(m+M)gh}{M} \quad \cdots ④$$

③，④より， $T=\frac{m(2m+3M)}{M}g$

補足

小球が最下点 B に到達するとき，支柱がひもから受ける張力は鉛直下向きなので，
台車が受ける水平方向の外力は 0 である。よって，台車の加速度は 0 となる。
ゆえに，台車の運動が原因の慣性力は 0 である。

カ

オの解説④より， $|v-V|=\sqrt{\frac{2(m+M)gh}{M}}$

キ

$$\frac{L}{|v-V|}=L\sqrt{\frac{M}{2(m+M)gh}}$$

ク

壁と衝突後の小球と台車の速さをそれぞれ v', V' とすると，

$\frac{v'-V'}{v-V}=-e$ より， $|v'-V'|=e|v-V|$

よって， $\frac{2L}{|v'-V'|}=\frac{2L}{e|v-V|}=\frac{2L}{e}\sqrt{\frac{M}{2(m+M)gh}}$

ケ

$$\frac{L\sqrt{\frac{M}{2(m+M)gh}}+\frac{2L}{e}\sqrt{\frac{M}{2(m+M)gh}}}{\left(1+\frac{2}{e}\right)\frac{L}{\sqrt{2gh}}}=\frac{L\left(1+\frac{2}{e}\right)\sqrt{\frac{M}{2(m+M)gh}}}{L\left(1+\frac{2}{e}\right)\sqrt{\frac{1}{2gh}}}=\sqrt{\frac{M}{m+M}}$$

問 1

初め両者は静止しているから系の初速度は 0 であり，

系に働く外力の水平成分も 0 のため，加速度も 0 だから。

問 2

台車の質量中心の水平方向の位置が支柱の位置にあると仮定し，

台車と小球を同時にはなしたときのその x 座標を 0 とすると，

台車と小球を同時にはなしたときの系の質量中心の座標＝$\dfrac{m\cdot(-h)+M\cdot 0}{m+M}$

小球が台車の端 D に達したときの台車の質量中心の座標を x とすると，

小球の x 座標は $x-L$ となるから，系の質量中心の座標＝$\dfrac{m(x-L)+Mx}{m+M}$

系の質量中心は動かないから，$\dfrac{m(x-L)+Mx}{m+M}=\dfrac{m\cdot(-h)+M\cdot 0}{m+M}$　$\therefore x=\dfrac{m}{m+M}(L-h)$

これと $L>h$ より，台車は最初の位置から右方向に $\dfrac{m}{m+M}(L-h)$ 移動した位置にある。

補足

台車の質量中心の位置そのものではなく，質量中心の位置の変化を求めればよいから，

台車の質量中心は適当にとってよい。事実，台車の質量中心についての記述がない。

たとえば，台車の質量中心を端 D にあるとし，

台車と小球を同時にはなしたときのその x 座標を 0 とすると，

台車と小球を同時にはなしたときの系の質量中心の座標＝$\dfrac{m\cdot(L-h)+M\cdot 0}{m+M}$

小球が台車の端 D に達したときの台車の質量中心の座標を x とすると，

小球のそれも x だから，系の質量中心の座標＝$\dfrac{mx+Mx}{m+M}$

系の質量中心は動かないから，$\dfrac{m\cdot(L-h)+M\cdot 0}{m+M}=\dfrac{mx+Mx}{m+M}$　$\therefore x=\dfrac{m}{m+M}(L-h)$

これと $L>h$ より，台車は最初の位置から右方向に $\dfrac{m}{m+M}(L-h)$ 移動した位置にある。

物理問題 Ⅱ

(1)

(1a)

$\boxed{イ}$ $\dfrac{qE_0T}{2m}$ $\boxed{ロ}$ $\dfrac{qE_0T^2}{8m}$ $\boxed{ハ}$ $-\dfrac{qE_0}{m}(t-T)$

解説

加速度を a_y とすると，$v_y = a_y \cdot \dfrac{T}{2}$，$y = \dfrac{1}{2}a_y\left(\dfrac{T}{2}\right)^2$

また，$0 < t \leq \dfrac{T}{2}$ のとき，$ma_y = qE_0$ より，$a_y = \dfrac{qE_0}{m}$

よって，

$$v_y = \frac{qE_0T}{2m} \quad \cdots \boxed{イ}$$

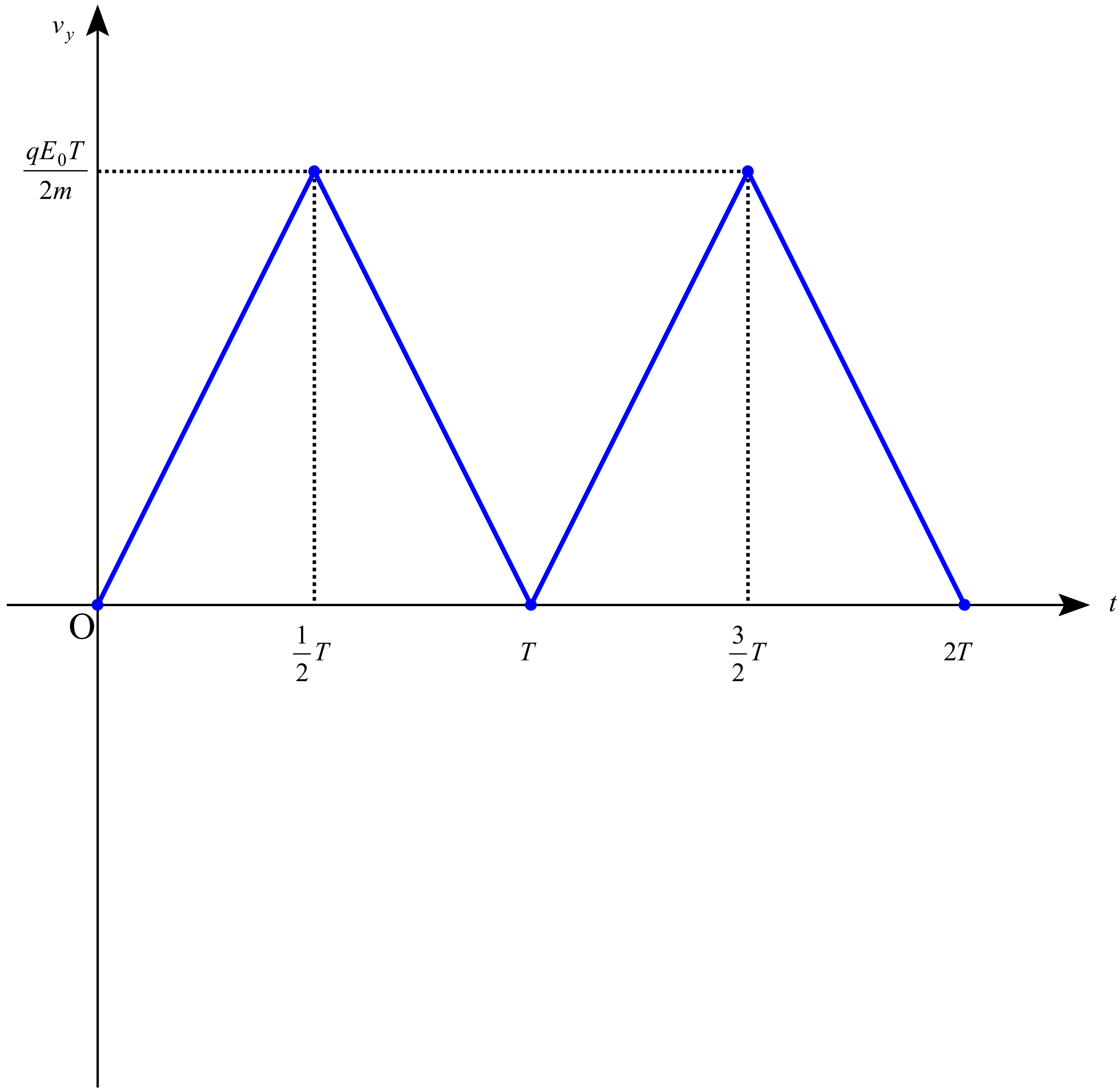
$$y = \frac{qE_0T^2}{8m} \quad \cdots \boxed{ロ}$$

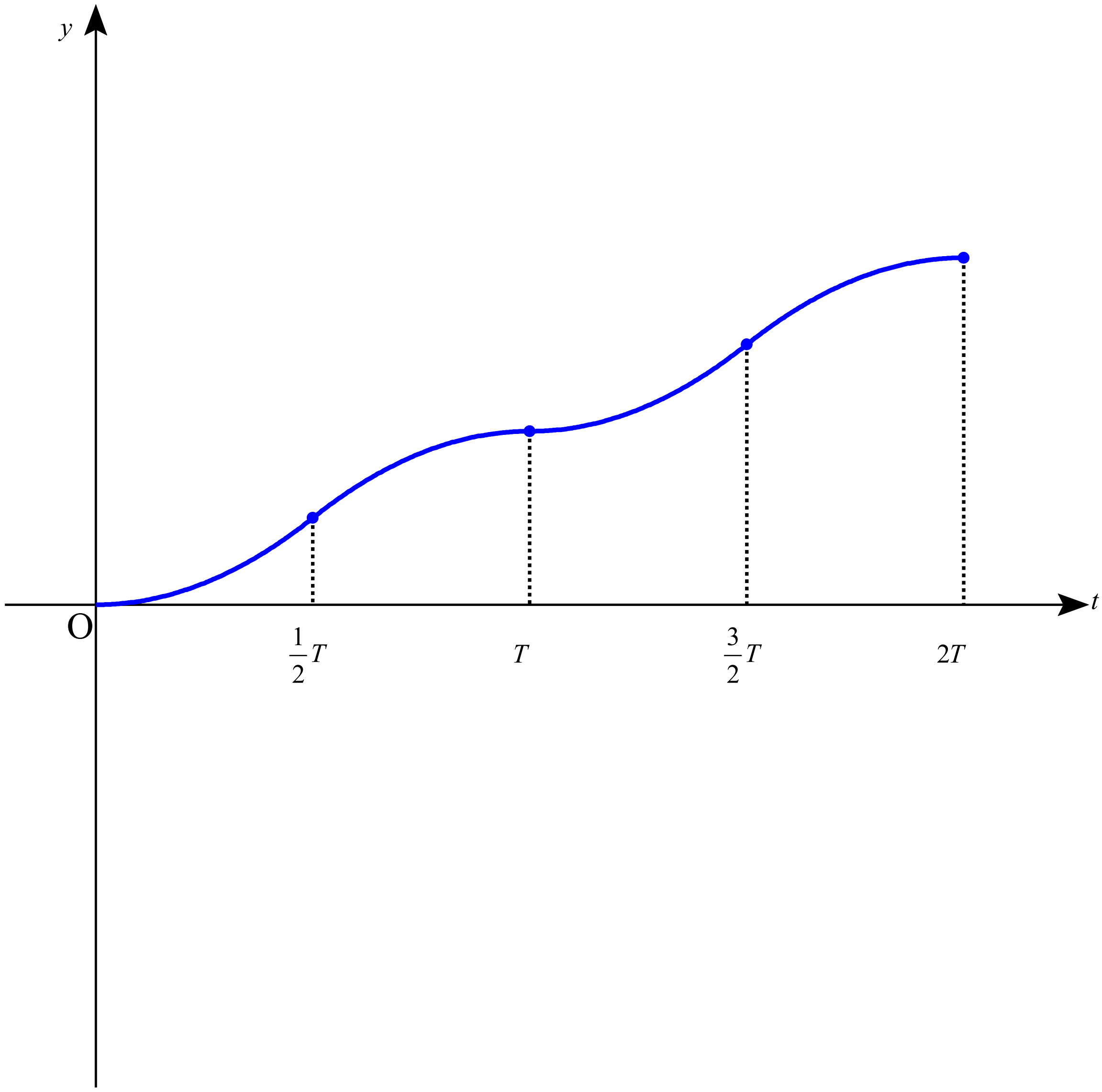
$\dfrac{T}{2} < t \leq T$ のとき，$ma_y = -qE_0$ より，$a_y = -\dfrac{qE_0}{m}$

これと $t = \dfrac{T}{2}$ のときの速度が $v_y = \dfrac{qE_0T}{2m}$ であることから，

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{qE_0T}{2m} - \frac{qE_0}{m}\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ &= -\frac{qE_0T}{m}(t-T) \quad \cdots \boxed{ハ} \end{aligned}$$

問 **1**





解説

$v-t$ グラフから v は常に 0 以上だから，本文にも「粒子 P は時間の経過とともに原点から離れていく」とあるように，y は単調に増加する。

これと加速度の大きさが同じで，

その向きが $0<t\leq\frac{T}{2}$ と $T<t\leq\frac{3}{2}T$ のとき正すなわち $y''>0$，

$\frac{T}{2}<t\leq T$ と $\frac{3}{2}T<t\leq 2T$ のとき負すなわち $y''<0$ だから，

$y-t$ グラフの放物線の概形は，$0<t\leq\frac{T}{2}$ と $T<t\leq\frac{3}{2}T$ のとき下に凸，$\frac{T}{2}<t\leq T$ と $\frac{3}{2}T<t\leq 2T$ のとき上に凸の放物線となる。

(1b)

$\boxed{\text{ニ}}$ $-\dfrac{qE_0T}{4m}$　$\boxed{\text{ホ}}$ $-\dfrac{qE_0}{m}\left(t-\dfrac{3}{4}T\right)$

解説

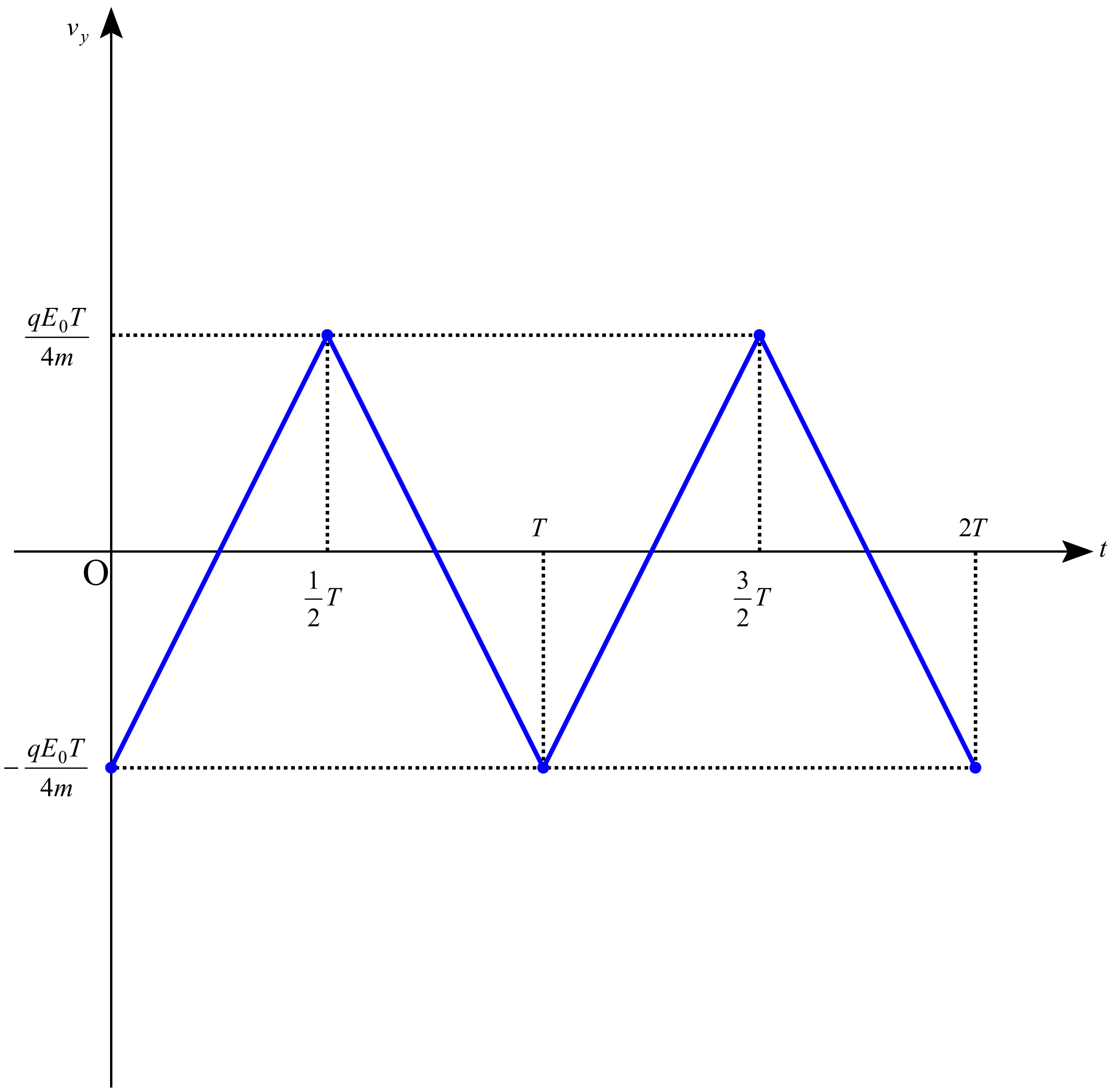
$\boxed{\text{ニ}}$

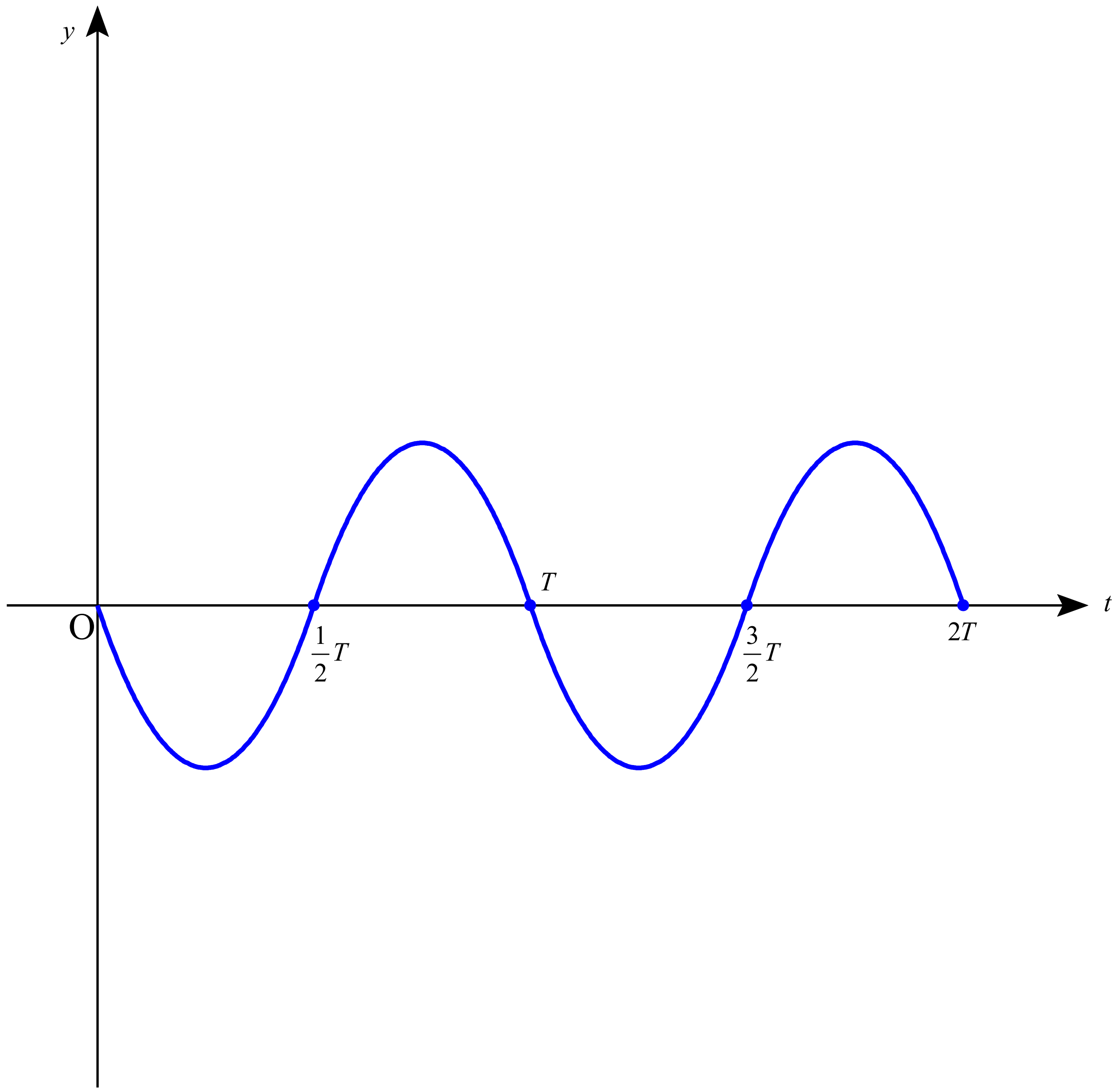
$$0 = v_y \cdot \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{qE_0}{m}\cdot\left(\frac{T}{2}\right)^2 \text{ より，}\quad v_y = -\frac{qE_0T}{4m}$$

$\boxed{\text{ホ}}$

$$v_y = -\frac{qE_0T}{4m} - \frac{qE_0}{m}\left(t-\frac{T}{2}\right) = -\frac{qE_0}{m}\left(t-\frac{3}{4}T\right)$$

問 **2**





解説

$v-t$ グラフについて

(1a)とは初速度の y 成分が異なるだけだから，$v-t$ グラフの形は問 1 と同じである。

これと $t=\dfrac{T}{2}, T$ において $y=0$ であることから，

問 1 の $v-t$ グラフを y 軸方向に $-\dfrac{qE_0T}{4m}$ だけ平行移動すればよい。

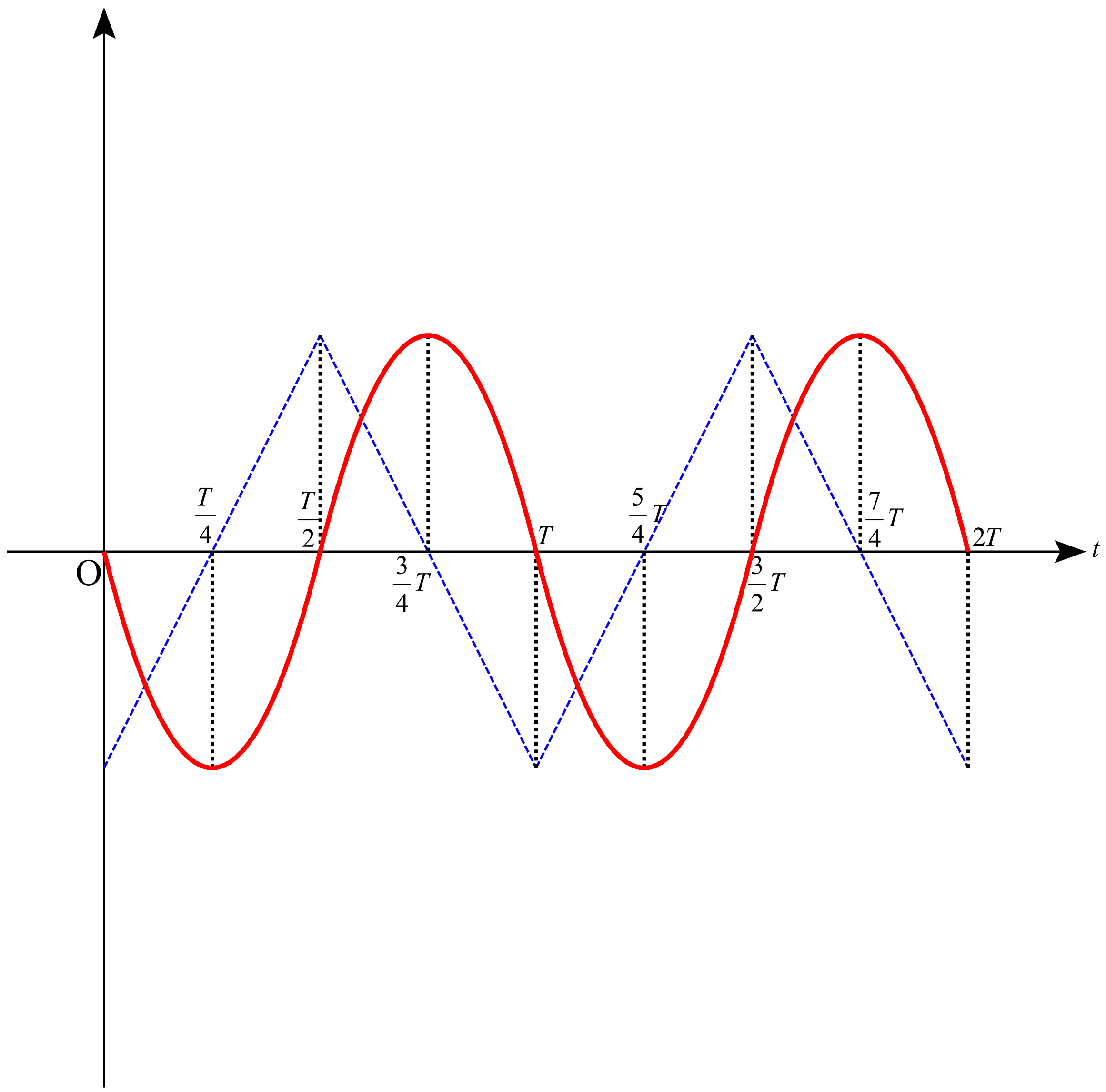
$y-t$ グラフ（放物線）について

$v-t$ グラフと t 軸で囲まれた部分の面積から $y=0$ となる t は $\dfrac{T}{2}, T, \dfrac{3}{2}T, 2T$，

また，y は $v<0$ のとき単調に減少し，$v>0$ のとき単調に増加するから，

y が極小値をとる t は $\frac{T}{4}$, $\frac{5}{4}T$，y が極大値をとる t は $\frac{3}{4}T$, $\frac{7}{4}T$ である。

したがって，これらの点を満たすように放物線を描いていけばよい。



(2)

$\boxed{\text{ヘ}}$ $\dfrac{q^2E_0TB_0}{4m}$ $\boxed{\text{ト}}$ $\dfrac{E_0T}{4B_0}$ $\boxed{\text{チ}}$ $\dfrac{qE_0T^2}{8m}$ $\boxed{\text{リ}}$ $\dfrac{2\pi m}{qT}$ $\boxed{\text{ヌ}}$ $\dfrac{qE_0T^2}{4\pi m}$

解説

$\boxed{\text{ヘ}}$

$\dfrac{T}{2}<t\leq T$ のとき，$\left|v_y\right|=\dfrac{qE_0T}{4m}$ より，$q\left|v_y\right|B_0=\dfrac{q^2E_0TB_0}{4m}$

$\boxed{\text{ト}}$

粒子 P の円運動の中心方向の運動方程式は，軌道半径を r とすると，

速さが $\left|v_y\right|=\dfrac{qE_0T}{4m}$ だから $m\dfrac{\left|v_y\right|^2}{r}=q\left|v_y\right|B_0$ $\quad\therefore r=\dfrac{m\left|v_y\right|}{qB_0}=\dfrac{m}{qB_0}\cdot\dfrac{qE_0T}{4m}=\dfrac{E_0T}{4B_0}$

$t=0$ のとき，点 P は原点にあり，ローレンツ力の向きは x 軸正の向きだから，

円運動の中心の x 座標は，$\dfrac{E_0T}{4B_0}$ で与えられる。

$\boxed{\text{チ}}$

軌跡の長さを l とすると，$l=\left|v_y\right|\cdot\dfrac{T}{2}=\dfrac{qE_0T}{4m}\cdot\dfrac{T}{2}=\dfrac{qE_0T^2}{8m}$

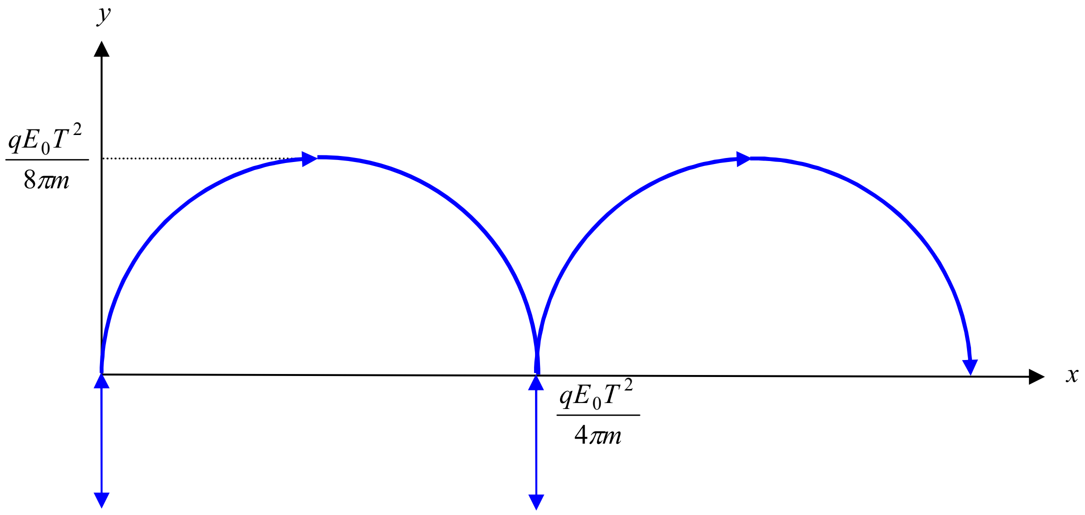
$\boxed{\text{リ}}$

$l=\pi r$ を満たせばよいから，$\dfrac{qE_0T^2}{8m}=\dfrac{\pi E_0T}{4B}$ $\quad\therefore B=\dfrac{2\pi m}{qT}$

$\boxed{\text{ヌ}}$

$$2r=2\cdot\frac{E_0T}{4B}=2\cdot\frac{E_0T}{4\cdot\dfrac{2\pi m}{qT}}=\frac{qE_0T^2}{4\pi m}$$

問 3

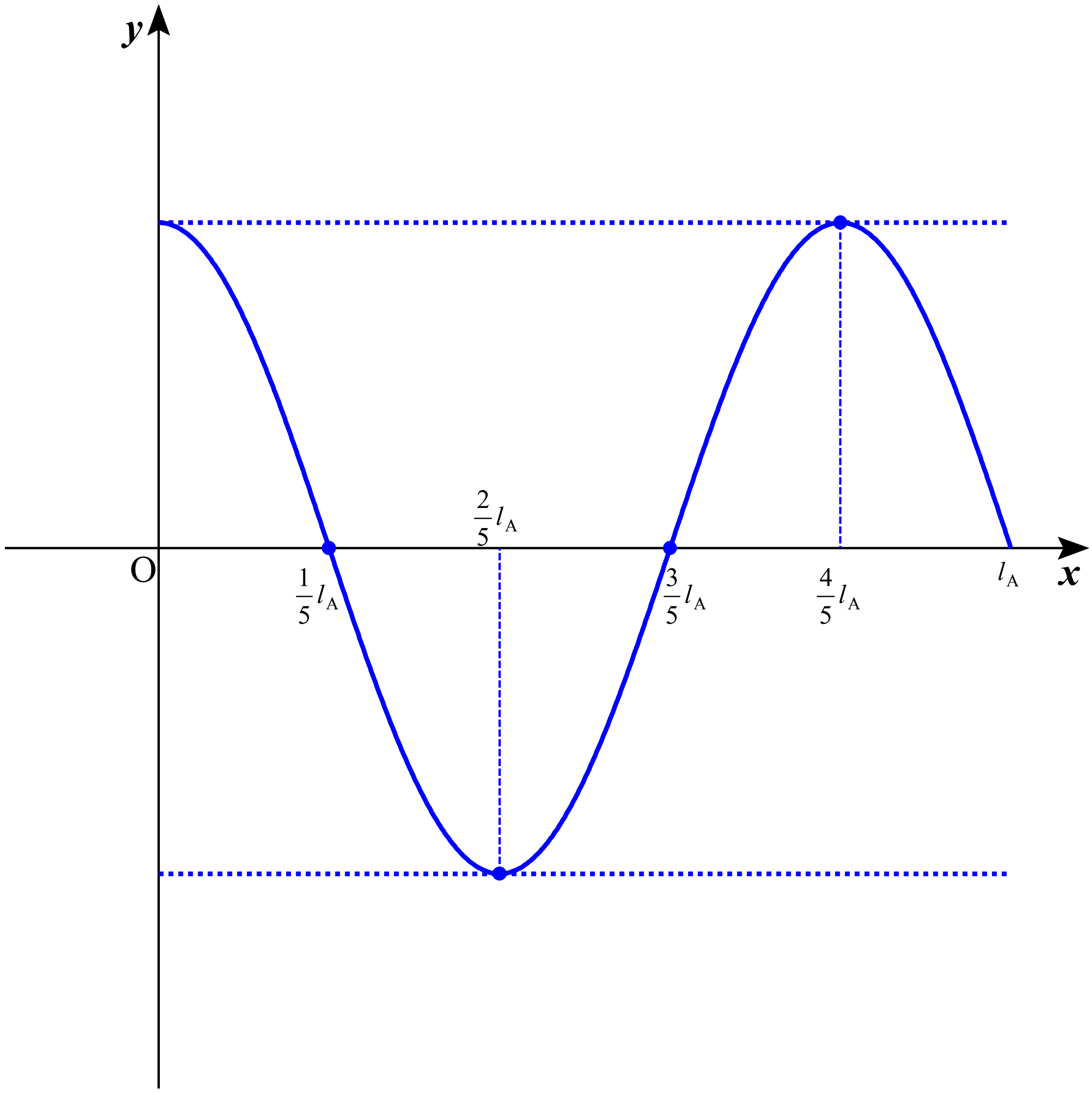


直線往復運動部分の片道は，問 2 $v-t$ グラフの $(0,\ 0)$, $\left(0,\ -\frac{qE_0T}{4m}\right)$, $\left(\frac{T}{4},\ 0\right)$ を頂点とする直角三角形の面積と等しいから， $\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{4}\cdot\frac{qE_0T}{4m}=\frac{qE_0T^2}{32m}$ である。

半円の長さは $\boxed{\text{チ}}$ より， $\frac{qE_0T^2}{8m}$ である。

物理問題　Ⅲ

問 1



または，上図の曲線を x 軸に関して対称移動した曲線

解説

ふたは固定端だから，定常波の節になる。

したがって，粉は腹の部分に集まる。

あ $\frac{4}{5}l_A$　い $\frac{4}{5}fl_A$　う $\frac{f}{5}$　え $x+y$　お $x+\Delta x+y+\Delta y$　か $\dfrac{1}{1+\frac{\Delta y}{\Delta x}}$　き ③

解説

あ

問 1 の定常波の波長と等しいから，$\lambda_A=\frac{4}{5}l_A$

い

$$V_A=f\lambda_A=f\cdot\frac{4}{5}l_A=\frac{4}{5}fl_A$$

う

V_A は一定だから，波長が最大のとき，すなわち基本振動のとき，振動数は最小になる。
これと基本振動の波長が $4l_A$ であることから，求める振動数を f' とすると，

$$\frac{4}{5}fl_A=f'\cdot 4l_A \quad \therefore f'=\frac{f}{5}$$

補足

振動板（腹）が $x=0$ にあるので，開口部補正の必要がない。

え・お・か・き

音波は縦波だから，位置 x における空気の変位が y であるということは，
位置 x における空気の x 軸方向の変位が y であるということである。
よって，位置 x の空気が移動した位置は
$x+y$　・・・え
同様に，位置 $x+\Delta x$ における空気が移動した位置は
$x+\Delta x+y+\Delta y$　・・・お
また，$x<x+\Delta x$ より，$x+y<x+\Delta x+y+\Delta y$
※縦波だから，左の空気と右の空気が接近し密になることはあっても，
位置が左右逆転することはない。
よって，断面積を S とすると，
筒領域 I の体積＝$S\{(x+\Delta x)-x\}=S\Delta x$
筒領域 II の体積＝$S\{(x+\Delta x+y+\Delta y)-(x+y)\}=S(\Delta x+\Delta y)$
これと，空気の密度の比＝筒領域の体積の逆数の比より，

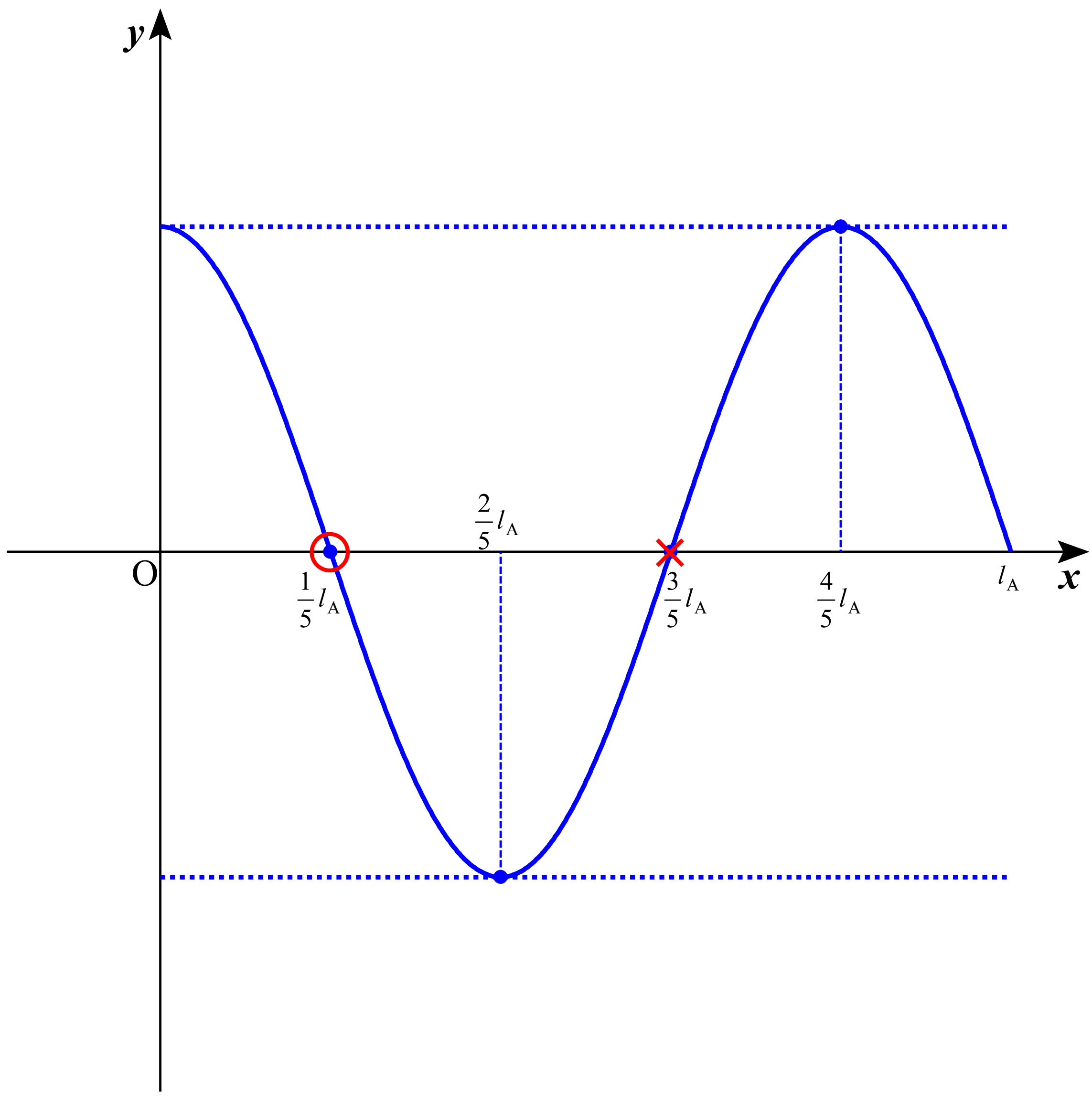
$$\frac{\frac{1}{S(\Delta x+\Delta y)}}{\frac{1}{S\Delta x}}=\frac{1}{\frac{\Delta x+\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{1+\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$　・・・か

したがって，筒領域 II の密度は筒領域 I の $\dfrac{1}{1+\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ 倍である。

よって，筒領域 II の密度が最小になる位置は，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ が，すなわちグラフの曲線の傾き（グラフの接線の傾き）が最大になる位置である。

ゆえに，選択肢は③　・・・$\boxed{\text{き}}$

問 2

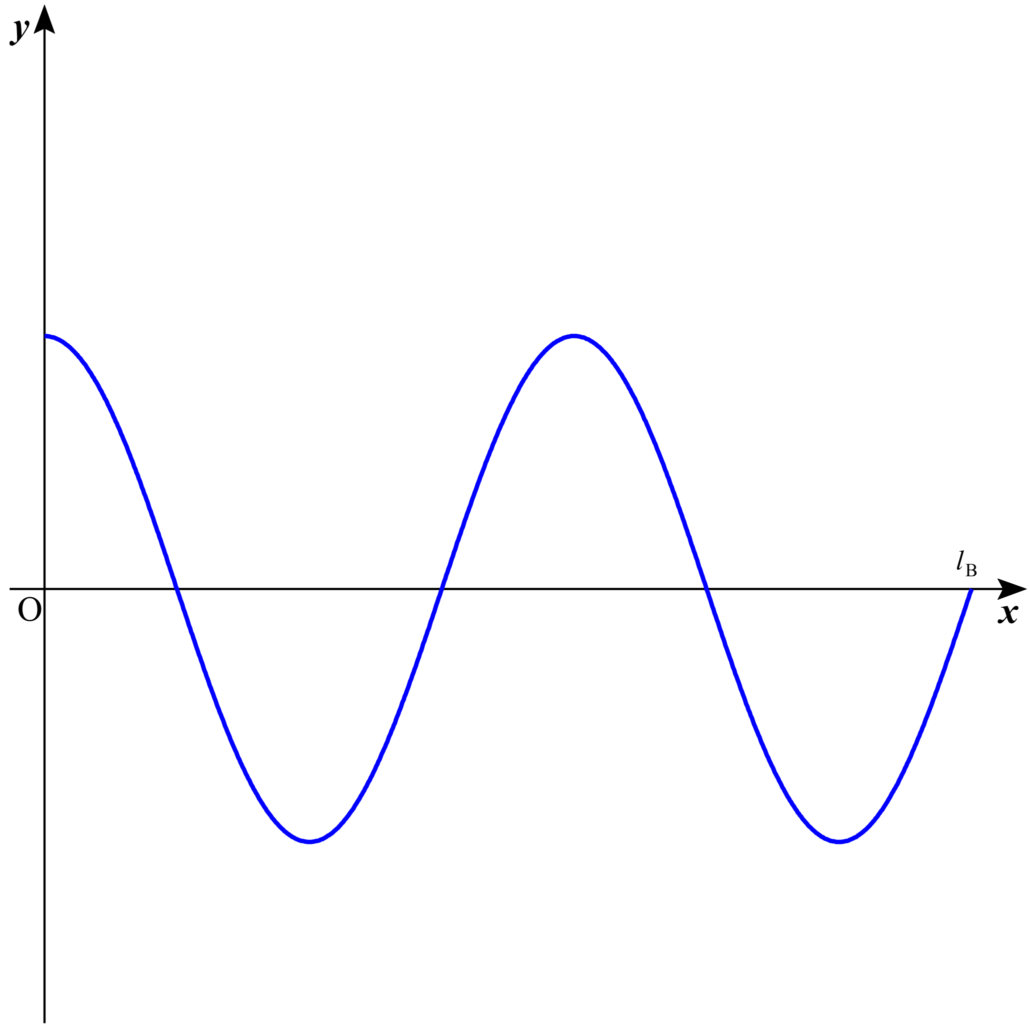


$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が最小となる位置に〇印，最大となる位置に×印を記入すればよい。

く $\frac{4}{7}l_B$　け $\frac{l_B}{l_A}T_A$　こ $\frac{7}{5}$　さ $\frac{7}{5}T_A$　し ①

解説

く



け

断面積を S，理想気体の物質量を n とする。

また，外圧を P とすると筒内の圧力も P である。

よって，理想気体の状態方程式より，

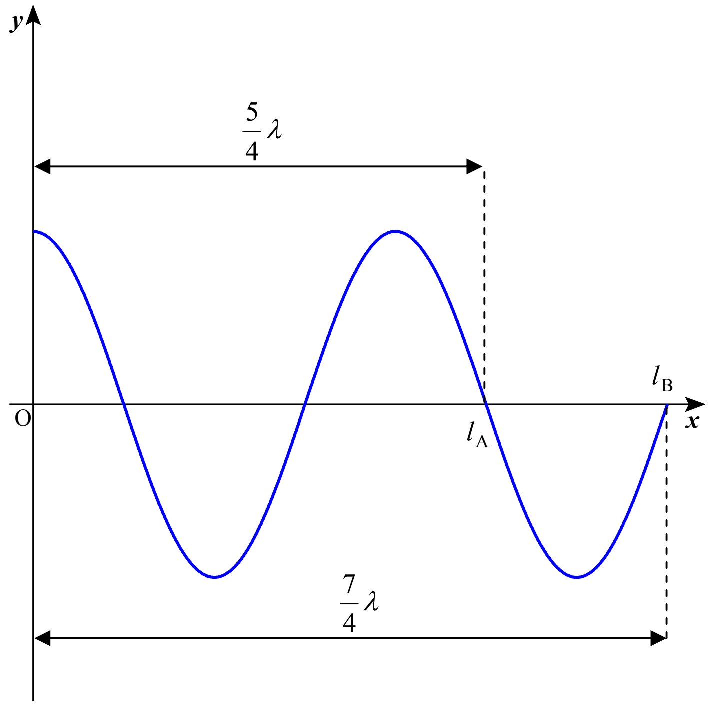
$PSl_A = nRT_A$　・・・①

$PSl_B = nRT_B$　・・・②

$\frac{②}{①}$ より，$\frac{l_B}{l_A} = \frac{T_B}{T_A}$　$\therefore T_B = \frac{l_B}{l_A}T_A$

$\boxed{こ}$・$\boxed{さ}$

$\lambda_A = \lambda_B = \lambda$ とすると，



より，$\dfrac{l_B}{l_A} = \dfrac{\frac{7}{4}\lambda}{\frac{5}{4}\lambda} = \dfrac{7}{5}$ ・・・$\boxed{こ}$

よって，$T_B = \dfrac{l_B}{l_A} T_A = \dfrac{7}{5} T_A$ ・・・$\boxed{さ}$

$\boxed{し}$

T_A のときの音速を V_A，T_B のときの音速を V_B とすると，

$V_A < V_B$，$V_A = f\lambda_A$，$V_B = f\lambda_B$ より，$\lambda_A < \lambda_B$ すなわち $\dfrac{\lambda_B}{\lambda_A} > 1$

よって，$\dfrac{l_B}{l_A} = \dfrac{\frac{7}{4}\lambda_B}{\frac{5}{4}\lambda_A} = \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{\lambda_B}{\lambda_A} > \dfrac{7}{5}$

問 3

T_{A} のときの音速を V_{A}，波長を λ_{A}，T_{B} のときの音速を V_{B}，波長を λ_{B} とすると，

$V_{\mathrm{A}} = V_0 + bT_{\mathrm{A}}$ ・・・①

$V_{\mathrm{B}} = V_0 + bT_{\mathrm{B}}$ ・・・②

$V_{\mathrm{A}} = f\lambda_{\mathrm{A}}$，$l_{\mathrm{A}} = \dfrac{5}{4}\lambda_{\mathrm{A}}$ より，$V_{\mathrm{A}} = \dfrac{4}{5}fl_{\mathrm{A}}$

$V_{\mathrm{B}} = f\lambda_{\mathrm{B}}$，$l_{\mathrm{B}} = \dfrac{7}{4}\lambda_{\mathrm{B}}$ より，$V_{\mathrm{B}} = \dfrac{4}{7}fl_{\mathrm{B}}$

また，$\boxed{\text{け}}$より，$T_{\mathrm{B}} = \dfrac{l_{\mathrm{B}}}{l_{\mathrm{A}}}T_{\mathrm{A}}$

これらを①，②に代入すると，

$\dfrac{4}{5}fl_{\mathrm{A}} = V_0 + bT_{\mathrm{A}}$ ・・・③

$\dfrac{4}{7}fl_{\mathrm{B}} = V_0 + \dfrac{bl_{\mathrm{B}}}{l_{\mathrm{A}}}T_{\mathrm{A}}$ ・・・④

④－③より，$\dfrac{4f(5l_{\mathrm{B}} - 7l_{\mathrm{A}})}{35} = b \cdot \dfrac{(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})T_{\mathrm{A}}}{l_{\mathrm{A}}}$　$\therefore b = \dfrac{4fl_{\mathrm{A}}(5l_{\mathrm{B}} - 7l_{\mathrm{A}})}{35T_{\mathrm{A}}(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})}$ ・・・(答)

これと③より，

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{4}{5}fl_{\mathrm{A}} - bT_{\mathrm{A}} \\
&= \frac{4fl_{\mathrm{A}}}{5}\frac{4fl_{\mathrm{A}}(5l_{\mathrm{B}} - 7l_{\mathrm{A}})}{35(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})} \\
&= \frac{4fl_{\mathrm{A}}}{5}\left\{1 - \frac{5l_{\mathrm{B}} - 7l_{\mathrm{A}}}{7(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})}\right\} \\
&= \frac{4fl_{\mathrm{A}}}{5} \cdot \frac{2l_{\mathrm{B}}}{7(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})} \\
&= \frac{8fl_{\mathrm{A}}l_{\mathrm{B}}}{35(l_{\mathrm{B}} - l_{\mathrm{A}})}
\end{aligned}
$$
・・・(答)

補足

発泡スチロールは腹に，リコポディウム（ヒカゲノカズラの胞子）は節に集まる。

クントの実験の映像：http://rikanet2.jst.go.jp/contents/cp0490/contents/pysi.html